



**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”  
Etapa locală, 19.02.2017  
Filiera tehnologică: profil tehnic  
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

**Clasa a X-a**

1. Fie  $x, y, z \in (1, \infty)$  astfel încât  $x \cdot y \cdot z = 3$ . Să se arate că:

$$\frac{\log_3^2 x + \log_3^2 y}{\log_3 x + \log_3 y} + \frac{\log_3^2 y + \log_3^2 z}{\log_3 y + \log_3 z} + \frac{\log_3^2 z + \log_3^2 x}{\log_3 z + \log_3 x} \geq 1.$$

**Soluție:**

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4} \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{a^2 + b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{\log_3^2 x + \log_3^2 y}{\log_3 x + \log_3 y} \geq \frac{\log_3 x + \log_3 y}{2} \text{ si analogele } \dots\dots\dots 1p$$

Prin insumare  $\Rightarrow S \geq \log_3 x + \log_3 y + \log_3 z \dots\dots\dots 1p$

$xyz=3 \Rightarrow \log_3 x + \log_3 y + \log_3 z = 1 \dots\dots\dots 1p$

finalizare  $\dots\dots\dots 2p$

2. Să se determine numerele complexe  $z$  știind că :  $|z+2i| \leq 1$  și  $|z+2| \leq \sqrt{3}$ .

**Soluție:**

$$z=x+iy, |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \dots\dots\dots 1p$$

$$|z+2i|^2 = |x+iy+2i|^2 = |x+i(y+2)|^2 = x^2 + (y+2)^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$|z+2|^2 = |x+2+iy|^2 = (x+2)^2 + y^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$x^2 + (y+2) \leq 1 \quad \text{si} \quad (x+2)^2 + y^2 \leq 3 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Prin adunare} \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4x + 4y + 8 \leq 4 \dots\dots\dots 1p$$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$x, y \in R \Rightarrow x = -1, y = -1, z = -1 - i \dots\dots\dots 1p$$

3. Să se rezolve în R ecuația :  $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{11-x} = 3$

**Soluție:**

Se ridică ambii termeni ai egalității la puterea 3

$$x-2+11-x+9\sqrt{-x^2+13x-22} = 27 \dots\dots\dots 1p$$

$$9\sqrt{-x^2+13x-22} = 18 \dots\dots\dots 1p$$

$$\sqrt[3]{x^2-13x+22} = -2 \dots\dots\dots 1p$$

$$x^2-13x+30 = 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$x_1 = 3, x_2 = 10 \dots\dots\dots$$

4. Rezolvați ecuația :  $2^x \log_2 x = 3^x \log_3 x$

**Soluție:**

Condiția de existență  $x > 0$ .....1p

$x = 1$  verifică ecuația ..... 1p

$$\text{Pentru } x \neq 1 \Rightarrow \frac{2^x}{3^x} = \frac{\log_3 x}{\log_2 x} \dots\dots\dots 1p$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{\log_2 2}{\log_2 x} \dots\dots\dots 1p$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \log_2 2 \dots\dots\dots 2p$$

$$x = \log_{\frac{2}{3}} (\log_2 2) \dots\dots\dots 1p$$